

第12回基礎ゼミ

混雑課金とNWモデル

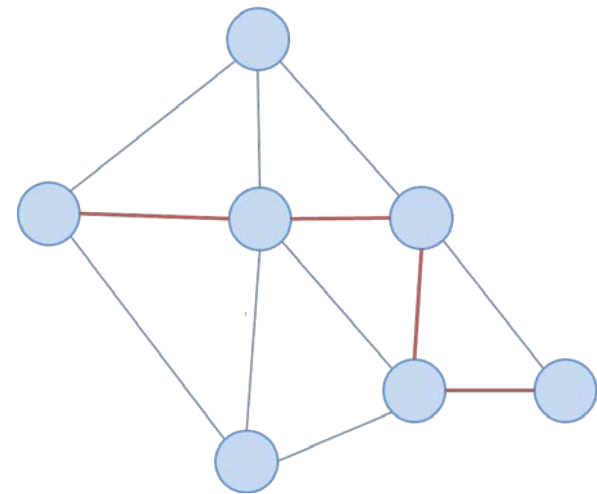
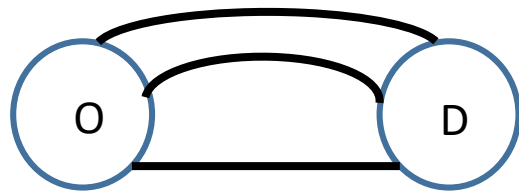
2018年6月21日

福田研

五百藏夏穂

- * 次善料金政策での最適混雑料金
(大阪都市圏でのケーススタディ)
- * 確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金
(赤松[1988])

位置づけ



1組のODが複数のリンクで直結

実際の道路は
2次元のネットワーク

ここからは, , ,
実際のネットワークに混雑課金を適用する際のモデルと効果に関する分析を行う

過去の研究

May and Milne [2000]

イギリスケンブリッジでネットワークを対象としてコードン，距離比例制，システム最適を計算（コードンは料金，位置ともに所与）

Santos et al [2001]

イギリス8都市でコードンの効果を計算
（コードンの位置固定，料金は最適化）

Verhoef [2002]

ネットワーク中の課金すべきリンクと料金水準の最適な組み合わせ

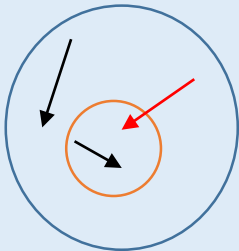
Zhang and Yang [2004]

コードンを横切るリンクの集合を内生的に求め，上海のネットワークに適用

道路課金の種類

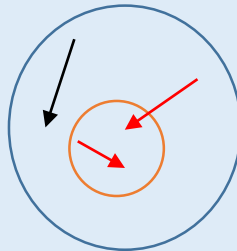
ここでは交通ネットワーク均衡モデルを用いて、
コードンプライシングと高速道路料金の効果を比較分析する

コードン
プライシング



シンガポール

エリア
プライシング



ロンドン

ホットレーン



アメリカ

有料高速道路



日本

モデル

トリップ費用 $c_{rs}^j = \alpha t_{rs}^j + \tau_{rs}^j$

$$t_{rs}^j = \sum_{a \in R_{rs}^j} \delta_{ars}^j t_a(x_a)$$
$$\tau_{rs}^j = \sum_{a \in R_{rs}^j} \delta_{ars}^j \tau_a$$
$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_j \delta_{ars}^j q_{rs}^j$$

ネットワーク均衡時

使われている経路のトリップ費用はすべて同じ

$$c_{rs}^j - C_{rs}^* \geq 0$$
$$q_{rs}^j (c_{rs}^j - C_{rs}^*) = 0$$
$$q_{rs}^j \geq 0$$

$$Q_{rs} = \sum_{j \in A_{rs}} q_{rs}^j$$

この時、rs間の総トリップ数 Q_{rs} について以下の式が成り立つ

$$D_{rs}^{-1}(Q_{rs}) = C_{rs}^*$$

I : ゾーン数

L : リンク数

x_a : リンク a を流れる交通量

t_{rs}^j : ゾーン rs 間 j 番目経路の
所要時間

τ_{rs}^j : ゾーン rs 間 j 番目経路の
道路料金

Q_{rs} : ゾーン r から s への交通量

D_{rs}^{-1} : 逆需要関数

α : 時間価値

q_{rs}^j : ODペア rs 間の j 番目経路を
選択したトリップ数

A_{rs} : ODペア rs 間で
利用可能な経路集合

これらを満たす,
リンク交通量, 経路交通量,
OD交通量, 均衡交通費用の組
→状態や厚生を評価できる

無料金均衡の場合 $\tau_a=0$ for all a

システム最適の場合

社会的余剰最大化問題

$$\max_{q_{rs}^j} \sum_r \sum_s \int_0^{Q_{rs}} D_{rs}^{-1}(z) dz - \alpha \sum_a t_a(x_a) x_a$$
$$q_{rs}^j \geq 0 \quad Q_{rs} = \sum_{j \in A_{rs}} q_{rs}^j$$

最適化の一階条件

$$D_{rs}^{-1}(Q_{rs}) - \alpha \sum_a \delta_{ars}^j \{t_a(x_a) + t'_a(x_a)x_a\} \leq 0$$
$$[D_{rs}^{-1}(Q_{rs}) - \alpha \sum_a \delta_{ars}^j \{t_a(x_a) + t'_a(x_a)x_a\}] q_{rs}^j = 0$$

各リンクにおける料金

$$\tau_a = \alpha t'_a(x_a) x_a$$

社会的効率的な道路利用を達成するためには、ネットワークのすべてのリンクにおいて、混雑の外部効果に等しい課金をする必要がある

⇒ 現実的に無理 ⇒ 一部で料金徴収

次善の料金政策（一般的定式化）

ネットワークの一部のリンクでのみ料金を徴収
それらのリンクにおいて料金水準を最適に設定

...

$$\max_{\tau} \sum_r \sum_s \int_0^{Q_{rs}(\tau)} D_{rs}^{-1}(z) dz - \alpha \sum_{a \in A} t_a(x_a(\tau)) x_a(\tau)$$

$$\text{s. t. } \tau_a \geq 0 \text{ for } a \in H \\ \tau_a = 0 \text{ for } a \notin H$$

$$\tau = (\tau_1, \tau_a, \dots, \tau_L)$$

H は課金するリンクの集合

課金がされないリンクでは、制約が課せられるので、事前の解となる代替的な次善料金方式として、それぞれの方式に対応する H を特定する

コードンプライシング

$$\max_{\bar{\tau}^c} \sum_r \sum_s \int_0^{Q_{rs}(\tau)} D_{rs}^{-1}(z) dz - \alpha \sum_{a \in A} t_a(x_a(\tau)) x_a(\tau)$$

* 単一コードン

$$\begin{aligned} \tau_a &= \bar{\tau}^c \text{ for } a \in H \\ \tau_a &= 0 \text{ for } a \notin H \end{aligned}$$

H はコードンを横切る全リンク
 $\bar{\tau}^c$ が同額で課せられる

* 多重コードン

$$\begin{aligned} \tau_a &= \bar{\tau}^{c_m} \text{ for } a \in h_m \\ \tau_a &= 0 \text{ for } a \notin H \end{aligned}$$

M 本のコードンラインが引かれたとすると、
課金されるリンク集合 H は $h_m, m = 1, 2, \dots, M$ にわけられる
それぞれは m 番目コードンを横切るリンク集合
同額 $\bar{\tau}^{c_m}$ が課される

高速道路料金

$$\max_{\bar{\tau}^c} \sum_r \sum_s \int_0^{Q_{rs}(\tau)} D_{rs}^{-1}(z) dz - \alpha \sum_{a \in A} t_a(x_a(\tau)) x_a(\tau)$$

* 均一料金

$$\begin{aligned} \tau_a &= \bar{\tau}^c \text{ for } a \in H \\ \tau_a &= 0 \text{ for } a \notin H \end{aligned}$$

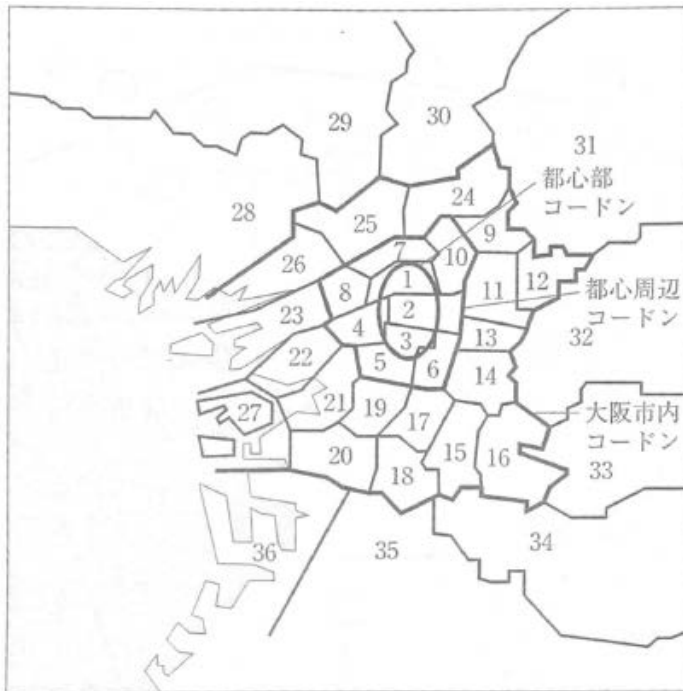
H はオンランプリンクの集合

* ゾーン料金

$$\begin{aligned} \tau_a &= \bar{\tau}_m^H \text{ for } a \in h_m \\ \tau_a &= 0 \text{ for } a \notin H \end{aligned}$$

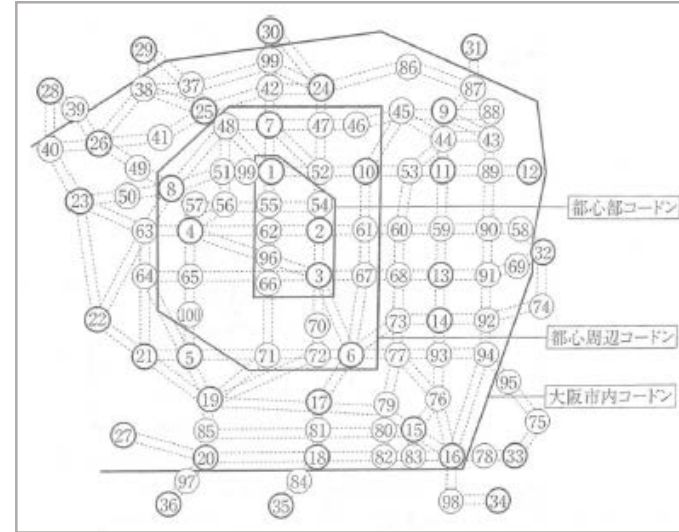
h_m は料金ゾーン m に属する高速道路の
オンランプおよび料金所境界を横切るリンク集合

大阪でのケーススタディ

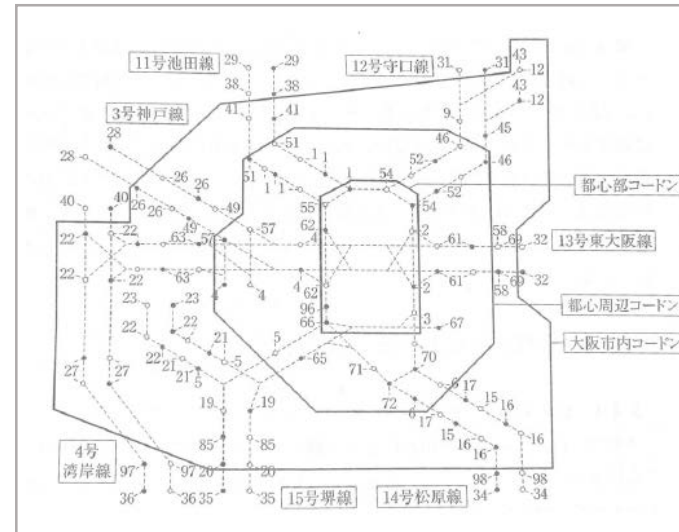


対象地域とゾーン区分

対象地域は36ゾーン
241ノード・630リンクからなるネットワーク



一般道路ネットワーク



高速道路ネットワーク

リンク走行関数・トリップ需要関数の特定化

* リンク走行関数

$$t_a(x_a) = t_a^0 \left\{ 1 + v \left(\frac{x_a}{W_a} \right)^\beta \right\}$$

W_a : リンク a の交通容量
 $v=0.48, \beta=2.82$

* 需要関数

$$D_{rs}(C_{rs}) = d \cdot n_r \cdot n_s^{\theta_s} \cdot \exp(-\gamma \cdot C_{rs})$$

n_r, n_s : 昼間人口

1994年の全国道路交通センサデータを観測値としてパラメータ推定

パラメータ推定結果

$$\begin{aligned} d &= 0.00024(15.0503) \\ \theta_s &= 0.6055(10.2505) \\ \gamma &= -0.00074(-24.8606) \end{aligned}$$

$R^2 = 0.5430$

無料金均衡とシステム最適

システム最適により

平均トリップ長の減少
→短いほど外部効果が小さい

平均速度の上昇
→9.52/30.2[km/h]-8.62/21.2[km/h]
29%上昇

社会的余剰は

5億9500万円すくない
(混雑による1日当たり損失額)
(改善可能な便益の最大値)

	無料金	システム最適	現行料金
総トリップ数 (台)	2,352,145	1,919,533	2,244,128
総走行距離 (台・キロ)	22,381,331	16,555,751	20,778,071
総走行時間 (台・時間)	1,183,696	677,124	1,039,374
平均トリップ長 (キロ)	9.52	8.62	9.26
平均旅行時間 (分)	30.2	21.2	27.8
平均料金支払額 (円)	0	672	151
消費者余剰変化 (100万円)		-696	-71
混雑料金収入 (100万円)	0	1,291	338
混雑料金による厚生改善 (100万円)		595	267

相対的改善

次善料金でどのくらい近づけられるかの指標

$$\text{相対的改善} = \frac{SS^{**} - SS^*}{SS^0 - SS^*}$$

現行の政策による2億6700万円は
社会的最適化の44%に当たる

コードンプライシング

単一コードン

- ・ 都心：300円
- ・ 都心周辺：500円
- ・ 大阪市全域：700円

社会的余剰は大阪市全域で最大
(相対的改善は65.6%)

多重コードン

- ・ 都心：100~200円
- ・ 都心周辺：100~200円
- ・ 大阪市全域：500~600円

3つ通過すると1000円ほどの課金になる
(相対的改善は77%ほど)

単一コードンでの結果

	無料金	都心 コードン	都心周辺 コードン	大阪市全域 コードン
最適コードン料金 (円)		300	500	700
総トリップ数 (台)	2,352,145	2,202,034	2,070,364	2,068,861
総走行距離 (台・キロ)	22,381,331	20,461,383	18,678,035	17,877,502
総走行時間 (台・時間)	1,183,696	1,043,001	913,443	809,984
平均トリップ長 (キロ)	9.5	9.29	9.02	9
平均旅行時間 (分)	30.2	28.4	26.5	23
平均料金支払額 (円)	0	148	276	367
消費者余剰変化 (100万円)		-160	-314	-369
混雑料金収入 (100万円)	0	325	571	760
混雑料金による厚生改善 (100万円)		165	258	390
相対的改善		27.74%	43.26%	65.58%

多重コードンでの結果

	1	2	3	4
都心コードンにおける料金 (円)	200	100	200	200
都心周辺コードンにおける料金 (円)	200	200	200	100
大阪市全域コードンにおける料金 (円)	600	600	500	600
総トリップ数 (台)	1,876,692	1,925,830	1,916,118	1,936,784
総走行距離 (台・キロ)	15,624,439	16,223,493	16,194,679	16,344,811
総走行時間 (台・時間)	677,818	712,530	717,560	721,810
平均トリップ長 (キロ)	8.33	8.42	8.45	8.44
平均旅行時間 (分)	21.7	22.2	22.5	22.4
平均料金支払額 (円)	552	511	510	499
消費者余剰変化 (100万円)	-578	-530	-524	-514
混雑料金収入 (100万円)	1,036	984	977	967
混雑料金による厚生改善 (100万円)	458	454	453	453
相対的改善	76.87%	76.31%	76.11%	76.07%

次善料金政策での最適混雑料金

高速道路料金

均一料金

900円で最適
(現行料金は過小)

ゾーン料金：2ゾーンシステム

システムCが効果的
(相対的改善53.8%)

コードンに比べて効果が小さい
→課金を回避する経路選択が可能で制御対象が限定

コードンに比べて消費者余剰の減少が小さい
→同水準の混雑緩和便益のために消費者余剰減少は少なくて済む

ゾーン料金：4ゾーンシステム

相対的改善が2ゾーンより大きいのにに対して、消費者余剰の減少は小さい
→詳細な料金システムの設計で、利用者損失を抑えながら混雑緩和できるかもしれない

2ゾーンでの上位結果

	均一料金	ゾーンシステム A	ゾーンシステム B	ゾーンシステム C
均一料金 (円)	900			
内側ゾーンの料金 (円)		600	500	600
外側ゾーンの料金 (円)		200	200	500
総トリップ数 (台)	2,182,796	2,216,391	2,228,534	2,202,561
総走行距離 (台・キロ)	19,816,894	20,232,568	19,771,329	19,243,220
総走行時間 (台・時間)	991,673	1,009,733	991,471	957,026
平均トリップ長 (キロ)	9.08	9.13	8.87	8.74
平均旅行時間 (分)	27.3	27.3	26.7	26.1
平均料金支払額 (円)	185	174	182	213
消費者余剰変化 (100万円)	-128	-95	-102	-149
混雑料金収入 (100万円)	403	386	405	469
混雑料金による厚生改善 (100万円)	275	292	303	321
相対的効果	46.18%	49.00%	50.94%	53.87%

4ゾーンでの上位結果

	1	2	3	4
都心部料金圏 (円)	200	100	0	200
都心周辺料金圏 (円)	0	100	100	0
大阪市内料金圏 (円)	400	300	300	300
大阪市外料金圏 (円)	500	500	600	600
総トリップ数 (台)	2,220,761	2,230,874	2,231,359	2,233,407
総走行距離 (台・キロ)	19,036,987	19,243,268	19,188,028	19,208,542
総走行時間 (台・時間)	950,729	961,587	957,930	959,797
平均トリップ長 (キロ)	8.57	8.63	8.60	8.60
平均旅行時間 (分)	25.7	25.9	25.8	25.8
平均料金支払額 (円)	215	209	207	211
消費者余剰変化 (100万円)	-111	-102	-98	-110
料金収入 (100万円)	477	466	461	471
混雑料金による厚生改善 (100万円)	367	364	363	361
相対的改善	61.65%	61.15%	61.08%	60.71%

まとめ

交通流動を記述するモデルを大阪都市圏に適用し次善の料金政策の効果を分析した

- * 都心部・都市周辺・大阪全域の単コードンでは、大阪全域コードンで社会的余剰が最も改善効果が発揮された。
- * 3重コードン制では、中心部へ全てのコードンを通過する場合1000円程度徴収するのが最適。厚生改善は77%
- * 高速道路におけるゾーン料金制は厚生改善効果は小さいが、同程度の厚生改善を期待する場合、利用者の余剰減少は少なく済む

赤松・桑原 [1988]

確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金

交通経済学及び交通ネットワーク
均衡理論における混雑料金理論,
限界費用原理



利用者の行動・料金の設定条件, 需要関
数の現実を簡略化したものでしかない

もっと現実に即すには...

①費関数の過程

ex)リンクコストが他リンクの交通量に依存する場合
→限界費用原理は成立

②交通流に関する過程

ex)違う車種が同一リンクに流れる場合
→限界費用原理は成立しない

③料金の設定制約

ex)次善の問題 →ケーススタディにとどまる

この研究では, 個人行動の不確定性を考慮する

最適: 総走行時間最小化

確率的利用者均衡状態: 交通量に応じてその所要時間が変化するネットワークにおいて, すべての利用者が自分が経路を変更することにより認知する所要時間を改善することができない状態

最適化問題としての定式化

$$x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_a, \dots) \quad \text{: リンク交通量}$$

$$c = {}^t(c_1, c_2, \dots, c_a, \dots) \quad \text{: リンク費用}$$

$$f_{rs} = {}^t(f_1^{rs}, \dots, f_k^{rs}, \dots) \quad \text{: 経路交通量}$$

$$c_{rs} = {}^t(c_1^{rs}, \dots, c_k^{rs}, \dots) \quad \text{: 経路費用}$$

経路交通量とリンク交通量

$$x_a = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs}$$

経路の一般化費用とリンクの一般化費用

$$c_k^{rs} = \sum_a c_a \delta_{ak}^{rs}$$

設定状況

- ・ 計画者は利用者に対して各リンクごとに料金を課す
- ・ 利用者は認知の一般化費用を最小化する経路選択を行う
- ・ 一般化費用は所要時間と料金の和
- ・ 一般化費用は誤差工を含む
- ・ リンク所要時間はリンク交通量に関して単調増加で凸な関数
- ・ 総需要固定

利用者行動と交通フローパターンを表現

$$P_k^{rs} = Prob(C_k^{rs} \leq C_l^{rs}, k \neq l)$$

$$C_k^{rs} = c_k^{rs} + \xi_k^{rs}$$

C_k^{rs} : 認知一般化費用

ξ_k^{rs} : 確率変数 (誤差項)

$$c_a = c_a(x_a)$$

$$f_k^{rs} = q_{rs} P_k^{rs}$$

q_{rs} : ODペアrs間の全交通量

これらを同時に満たすネットワーク配分が

SUE (確率的利用者均衡配分)

SUE配分は以下の最適化問題と等価

$$\max_c Z = \sum_{rs} q_{rs} S_{rs} - \sum_a \int_0^{c_a} c_a^{-1}(v) dv$$



$c_a^{-1}(v)$:リンクコスト逆関数

S_{rs} :ODペアごとの最小一般化費用の期待値

$$\max_c Z = \sum_{rs} q_{rs} S_{rs} - \sum_a x_a c_a(x_a) + \sum_a \int_0^{x_a} c_a(\omega_a) d\omega$$

リンクフロー未知

ゲーム理論であれば
Stackelberg問題の形



目的関数・制約条件が
凸関数であれば解ける



Z_p が凸ではない



見方を変えて

最適化の時の x^0 がSUEの時の
に一致すればよいはず...



混雑料金 d を付加することによる
SUEフローパターン x 総走行時間最小化

$$c = t + d \quad \begin{aligned} d &= {}^t(d_1, \dots, d_a, \dots) \\ t &= {}^t(t_1, \dots, t_a, \dots) \end{aligned}$$

二段階最小化問題として混雑料金パターンが求まる

$$\min_d Z_p = \sum_a x_a t_a(x_a)$$

s. t.

$$\max_c Z = \sum_{rs} q_{rs} S_{rs}(c) - \sum_a x_a c_a(x_a) + \sum_a \int_0^{x_a} c_a(\omega_a) d\omega$$

一般化費用についてのSUEと所要時間について
のSOが一致するための必要十分条件を導く方針にする

最適性条件

SUEと等価な最適化問題と双対な問題

$$\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}^{**}(c_{rs}^{**}) = \min \left[\sum_a \int_0^{x_a} c_a(\omega_a) d\omega - \sum_{rs} q_{rs} S_{rs}^*(p_{rs}) \right]$$

S_{rs}^* は S_{rs} の共役関数 S_{rs}^{**} は S_{rs}^* の共役関数

P_{rs} は各経路の選択確率を要素としてもつベクトル

以下の条件を付加することでSUEフローとSOフローは一致

$$\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}^*(P_{rs}) = \sum_a \int_0^{x_a} c_a(\omega_a) d\omega - \sum_a \int_0^{x_a} \hat{t}_a(\omega) d\omega$$

$$\hat{t}_a = t_a + x_a \frac{dt_a}{dx_a}$$

$$\begin{aligned} \sum_a q_{rs} S_{rs}^{**}(c_{rs}^{**}) &= \min_x \sum_a \int_0^{x_a} \hat{t}_a(\omega) d\omega \\ &= \min_x \sum_a x_a t_a(x_a) \end{aligned}$$

SO問題の目的関数と一致！

最適性条件

SUEが達成されている時任意のODペアについて

$$S_{rs} = P_{rs} c_{rs} - S_{rs}^*(P_{rs})$$

変形して偏微分 \rightarrow

$$S_{rs} = c_k^{rs} - \frac{\partial S_{rs}^*(P_{rs})}{\partial P_k^{rs}}$$

一般化費用についてのSUEと所要時間についてのSOが一致している状態で条件式が成立していなければならない

$$\frac{\partial S_{rs}^*(P_{rs})}{\partial P_k^{rs}} = c_k^{rs_0} - \widehat{t}_k^{rs_0}$$

$$\widehat{t}_k^{rs} = \sum_a \widehat{t}_a \delta_{ak}^{rs}$$

$$S_{rs}(t_{rs}^0 + e_{rs}) = \widehat{t}_{rs}^0$$

SOの時の期待最小一般化費用 SOの時の限界所要時間

SOが達成されている時使用されている経路の限界経路所要時間は等しい

$$\frac{\partial S_{rs}^*(P_{rs})}{\partial P_k^{rs}} = c_k^{rs_0} - \widehat{t}_{rs}^0$$

各ODペアで使用されている経路の限界経路所要時間は等しい

最適経路料金

ロジットベースSUEで最適経路料金を求める

$$\frac{\partial S_{rs}^*(t_{rs}^0 + e_{rs})}{\partial P_k^{rs}} = t_k^{rs_0} + e_k^{rs} - \widehat{t_{rs}^0}$$

経路料金は一般的に

$$e_k^{rs} = t_k^{rs_0} - \widehat{t_k^{rs_0}} + \frac{\partial S_{rs}^*(P_{rs}^0)}{\partial P_k^{rs}}$$

e_k^{rs} が未知変数
他は経路所要時間・交通量から知れる

ロジットモデルにおける期待最小費用関数

$$S_{rs}(c_{rs}) = \frac{1}{\theta} \ln \sum_k \exp(-\theta c_m^{rs})$$

θ は認知費用の確率変動の
大きさを表すパラメータ

$$S_{rs}^*(P_{rs}) = \frac{1}{\theta} \sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs} \quad \forall r, s$$

確率的選択によって
生じる付加項

最適経路料金

$$e_k^{rs} = \widehat{t_k^{rs_0}} - t_k^{rs_0} + \frac{1}{\theta} \left[\ln \left(\frac{1}{P_k^{rs_0}} \right) - 1 \right] \quad \forall k, r, s$$

従来の混雑料金式の一般化式

最適リンク料金

最適リンク料金 d^0 の存在と唯一性について検証

- ・経路選択確率が0に近いと経路料金が無限大
- ・SOでリンクフローは唯一に求まるが、経路フローは唯一ではない

*リンク交通量 x と経路交通量 f の関係

*リンク料金 d と経路料金 e の関係



最適経路料金 e^0 と最適リンク料金 f^0 の関係

$$P_k^{rs} = \exp(-\theta c_k^{rs}) / \sum_m \exp(-\theta c_m^{rs}) \quad \forall r, s, k$$

リンク料金 d とリンク交通量 x の関係を導く

わかりやすくするために
ODペアを区別しない表記に統一

K : 全経路 (通し番号)

L : 全リンク

N : 全ノード

Δ : δ_{ak} を a 行 k 列要素とする接続行列 ($L \times K$)

リンク交通量 x と経路交通量 f

$$x = \Delta f \quad \begin{array}{l} \Delta \text{は} \delta_{ak} \text{の定義と} \\ \text{リンク交通量保存から階数が} L-N \end{array}$$

$$A \equiv P\Delta Q = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} P: L \times L \text{行列} \\ Q: K \times K \text{行列} \end{array}$$

両辺左から P をかけて

$$\begin{array}{l} \tilde{x} = A\tilde{f} \\ \tilde{x} \equiv Px \\ \tilde{f} \equiv Q^{-1}f \quad \rightarrow f = Q\tilde{f} \end{array}$$

f の要素のうち $L-N$ 個は (x_1, \dots, x_{L-N}) によって決まり
残りの $K-(L-N)$ は x によらない任意の変数 λ

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x, \lambda) \\ \vdots \\ f_{L-N}(x, \lambda) \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{K-(L-N)} \end{bmatrix}$$

リンク料金 d と経路料金 e

$$e = {}^t\Delta d$$

両辺左から tQ をかけて

$$\begin{array}{l} \tilde{e} = {}^tA\tilde{d} \\ \tilde{e} \equiv {}^tQe \\ \tilde{d} \equiv ({}^tP)^{-1}d \end{array}$$

d の要素のうち $L-N$ 個は (e_1, \dots, e_{L-N}) によって決まり
残りの N は e によらない任意の定数 μ

$$d = \begin{bmatrix} d_1(e_1, \dots, e_{L-N}, \mu) \\ \vdots \\ d_{L-N}(e_1, \dots, e_{L-N}, \mu) \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{条件} \sum_{j=1}^K Q_{kj}e_j = 0 \\ (k = L - N + 1, \dots, K) \end{array}$$

最適経路料金 e^0 と最適リンク料金 f^0 の関係

認知費用の誤差項が経路ごとに独立とすると f^0 から e^0 の写像関係には経路ごとに独立している

$$e_k = \psi_k[f_k(x, \lambda)]$$

$$e^0 = \begin{bmatrix} \psi_1[f_1(x, \lambda)] \\ \vdots \\ \psi_{L-N}[f_{L-N}(x, \lambda)] \\ \psi_{L-N+1}[\lambda_1] \\ \vdots \\ \psi_K[\lambda_{K-(L-N)}] \end{bmatrix}$$

リンク料金 d とリンク交通量 x の関係

最適リンク料金 d^0 の N 個の要素は x^0 に依存しない任意の定数 μ となり、残りの $L-N$ 個は x^0, λ, μ の関数

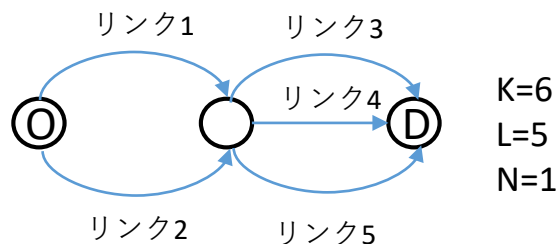
最適リンク料金 d^0 の N 個の要素は x^0 に依存しない任意の定数 μ となり、残りの $L-N$ 個はSOリンク交通量 x^0, μ に関して一意に求まる

$$d^0 = \begin{bmatrix} d_1(x^0, \lambda, \mu) \\ \vdots \\ d_{L-N}(x^0, \lambda, \mu) \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

$$d^0 = \begin{bmatrix} d_1(x^0, \mu) \\ \vdots \\ d_{L-N}(x^0, \mu) \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

e^0 と f^0 の関係式, f^0 から e^0 の写像, 制約条件 $\lambda_1, \dots, \lambda_{K-(L-N)}$ は任意の値でよい変数ではなく, x^0 に対して一意的に決まる

簡単なネットワークへの理論の適用



接続行列

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \equiv P\Delta Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L-N=4 \\ N=1 \end{matrix}$$

例

P: 5 × 5 行列 Q: 6 × 6 行列

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

リンク交通量から経路交通量が求まる

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 - x_4 - x_5 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ f_2 &= x_4 - \lambda_1 \\ f_3 &= x_5 - \lambda_2 \\ f_4 &= x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \\ f_5 &= \lambda_1 \\ f_6 &= \lambda_2 \end{aligned}$$

経路料金からリンク料金が求まる

$$\begin{aligned} d_1 &= e_1 - \mu \\ d_2 &= e_4 - \mu \\ d_3 &= \mu \\ d_4 &= -e_1 + e_2 + \mu \\ d_5 &= -e_1 + e_3 + \mu \end{aligned}$$

経路料金の式

$$e_k = \hat{t}_k - t_k + \frac{1}{\theta} \left[\ln \left(\frac{q}{f_k} \right) \right] \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

q: OD交通量

リンク料金に分解し書き換えると

$$d_a = x_a \left(\frac{dt_a}{dx_a} \right) + \frac{1}{\theta} \alpha_a$$

確率的付加項 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5)$ は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \ln q - \ln \{x_1 - x_4 - x_5 + \lambda_1 + \lambda_2\} - \mu \\ \alpha_2 &= \ln q - \ln \{x_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\} - \mu \\ \alpha_3 &= \mu \\ \alpha_4 &= \ln \{x_1 - x_4 - x_5 + \lambda_1 + \lambda_2\} - \ln(x_4 - \lambda_1) + \mu \\ \alpha_5 &= \ln \{x_1 - x_4 - x_5 + \lambda_1 + \lambda_2\} - \ln(x_5 - \lambda_2) + \mu \end{aligned}$$

リンク料金が存在するための制約条件

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 - e_4 + e_5 &= 0 \\ e_1 - e_3 - e_4 + e_6 &= 0 \end{aligned}$$

SO状態でのリンクフロー、
限界所要時間を代入すれば

$$\lambda_1 = \frac{x_2 x_4}{x_1 + x_2} \quad \lambda_2 = \frac{x_2 x_5}{x_1 + x_2}$$

SUEに対する
最適料金が求められる！

確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金

簡単なネットワークへの理論の適用

$$q = x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$t_i = a_i x_i^4 + b_i$$

パラメータ a, b
のもとSOを計算

総走行時間: 1.793

リンク番号	パラメータ		システム最適状態		
	a _i	b _i	交通量	所要時間	限界時間
1	5.0	0.6	0.4950	0.900	2.101
2	4.0	0.8	0.5050	1.060	2.101
3	8.0	0.5	0.3647	0.641	1.207
4	7.0	0.7	0.3476	0.801	1.207
5	6.0	1.0	0.2883	1.041	1.207

SOでのフローと減価率所要時間からUE,SUEでの最適リンク料金を計算

($\mu=1.0, \theta=5.0$)

料金付加なし
→総走行時間は
SO時より大きい

リンク番号	利用者均衡		確率的利用者均衡	
	交通量	所要時間	交通量	所要時間
1	0.5302	0.995	0.5257	0.982
2	0.4698	0.995	0.4743	1.002
3	0.5000	1.000	0.4460	0.817
4	0.4550	1.000	0.3813	0.848
5	0.0450	1.000	0.1727	1.005
総時間	1.995		1.853	

料金付加あり
→総走行時間は
SO時と一致

リンク番号	UEに対する最適料金	確率的付加項	SUEに対する最適料金
a	$x_a \frac{dt_a}{dx_a}$	$\frac{1}{\theta} \alpha_a$	d_a
1	1.201	-0.658	0.543
2	1.041	-0.662	0.379
3	0.566	1.000	1.566
4	0.406	1.010	1.416
5	0.166	1.047	1.213

まとめ

- * 確率利用者均衡条件下でも適当な経路料金を設定することで、ネットワークにおいて通常のSOフローパターンに一致させることができる
- * 任意のネットワークに適用可能にするには、一般化費用のもとでSUE状態を表す方程式に期待最小一般化費用がSO状態で限界所要時間と等しいことを示す条件を付加する
- * ロジットベースSUEでは限界費用原理を包括する一般化式で表現できる
- * ロジットベースSUEではノード数のリンクに任意の料金を設定すれば残りのリンクの最適リンク料金は一意に求まる。