基礎ゼミ10

確定的利用者均衡配分

平成30年6月1日(金)

福田研究室　修士1年生
室　祥太朗

目次

1. 利用者均衡配分(1)

利用者均衡配分の特徴

◆配分原則(ドライバーの行動原理)に基いて最適な交通量を割り当てる.

➢データに基づく相関関係ではなく最適化問題としてモデリング

◆AONや分割配分とは異なり, 混雑を介したドライバーの経路選択を均衡状態として表現している.

配分原則

◆Wardropの第1原則(等時間原則)User Equilibrium: UE

利用者均衡の状態において, それぞれのドライバーは自分にとって最も所要時間の少ない経路を選択する. その結果として, 起終点間に存在する経路のうち,
(1)利用される経路の所要時間はみな等しく,
(2)利用されていない経路の所要時間よりも小さいか, せいぜい等しい
という均衡状態となる.

➢ 利用者にとって最も望ましい経路選択

1. 利用者均衡配分(2)

◆Wardropの第2原則(システム最適)System Optimum: UE

道路網における総走行時間が最小となるシステム全体の最適化

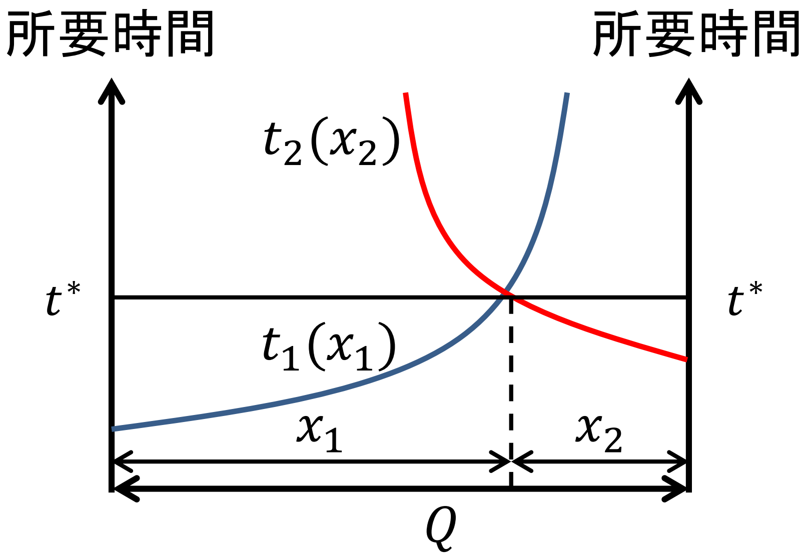
➢道路管理者にとって最も理想的なシステムの運用状態

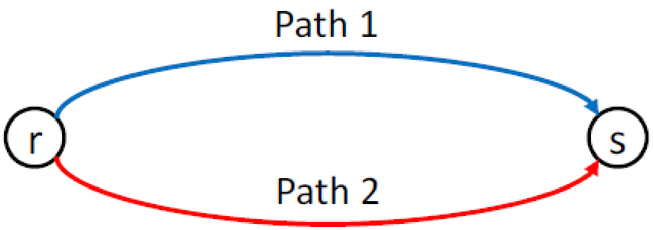
1. UEに基づく均衡状態

均衡状態とは？

◆ 等時間原則そのものが静的・需要固定・確定的な均衡状態を意味しており，その時に最適な交通量が各リンクに配分される

◆ ゲーム理論におけるNash均衡と等価であり，全てのドライバーが戦略（経路）をもはや変更できない状態である





・均衡点は各リンクコスト関数の交点として求まる
・これはミクロ経済学における需要均衡と同じ原理
・実際には多くの経路が存在するため，大規模な連立方程式を解くことで均衡状態の交通量（最適な配分交通量）を求める．

1. 利用者均衡配分の定式化(1)

1)準備

◆ リンクと交通量及びコストの関係

リンク交通量

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

➢ リンクaを通るすべての経路の交通量を足す．リンクaの交通量x_a は，そのリンクを含む経路の交通量f_k^{rs}の総和に等しいことがすべてのリンクで成立する．

x_a: リンクaのリンク交通量　S: 着ノードsの集合　R: 着ノードrの集合

t_a: リンクaの所要時間

f_k^{rs}: ODペアrs間第k経路の経路交通量

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1: OD\text{ペア}rs\text{間第}k\text{経路がリンク}a\text{を含む} \\ 0: \text{そうでないとき} \end{cases}$$

C_k^{rs}: ODペアrs間第k経路の経路所要時間でリンク所要時間，リンク交通量の関数

C_{rs}: ODペアrs間の最短経路所要時間（定数）

1. 利用者均衡配分の定式化(2)

1)準備

◆ リンクと交通量及びコストの関係

経路コスト

$$c_k^{rs} = \sum_{a \in A} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} t_a \, \delta_{a,k}^{rs}$$

- ある経路のすべてのリンクの所要時間を足す．総所要時間c_k^{rs}は，その経路を構成しているリンク所要時間t_a の総和に等しいことがすべての経路で成立する．（リンクコストの加法性）前後のリンクの渋滞は考えない．リンク間の相互作用は考えない．

x_a: リンクaのリンク交通量　　S: 着ノードsの集合　　R: 着ノードrの集合

t_a: リンクaの所要時間

f_k^{rs}: ODペアrs間第k経路の経路交通量

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1: OD\text{ペア}rs\text{間第}k\text{経路がリンク}a\text{を含む} \\ 0: \text{そうでないとき} \end{cases}$$

C_k^{rs}: ODペアrs間第k経路の経路所要時間でリンク所要時間，リンク交通量の関数

C_{rs}: ODペアrs間の最短経路所要時間（定数）

1. 利用者均衡配分の定式化(3)

1)準備

◆ OD交通量の条件

フロー保存則

$$q_{rs} = \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs}$$

q_{rs}: ODペアrsの交通量

- あるODペアrsの交通量q_{rs}は，経路交通量f_k^{rs}の総和に等しいことが全てのODで成立する．途中で車が湧いたり，消えたりしない．物理の質量保存則と同じ．

x_a: リンクaのリンク交通量　　S: 着ノードsの集合　　R: 着ノードrの集合

t_a: リンクaの所要時間

f_k^{rs}: ODペアrs間第k経路の経路交通量

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1: OD\text{ペア}rs\text{間第}k\text{経路がリンク}a\text{を含む} \\ 0: \text{そうでないとき} \end{cases}$$

C_k^{rs}: ODペアrs間第k経路の経路所要時間でリンク所要時間，リンク交通量の関数

C_{rs}: ODペアrs間の最短経路所要時間（定数）

1. 利用者均衡配分の定式化(4)

◆ OD交通量の条件

非負制約

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad x_a \geq 0$$

- 経路交通量およびリンク交通量は負とならない．連立方程式を解くと，f_k^{rs} と x_a が，負になることがある．しかし，実際はそんなことはない．

リンクコスト

$$t_a = t_a(x_a)$$

- リンクのコスト(所要時間)はそのリンクの交通量のみに依存して決定される．他のリンクの状態に依存しない(リンク間相互作用がない)

x_a: リンクaのリンク交通量　　S: 着ノードsの集合　　R: 着ノードrの集合

t_a: リンクaの所要時間

f_k^{rs}: ODペアrs間第k経路の経路交通量

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1: OD\text{ペア}rs\text{間第}k\text{経路がリンク}a\text{を含む} \\ 0:\ \text{そうでないとき} \end{cases}$$

C_k^{rs}: ODペアrs間第k経路の経路所要時間でリンク所要時間，リンク交通量の関数

C_{rs}: ODペアrs間の最短経路所要時間(定数)

1. 利用者均衡配分の定式化(5)

2) 利用者均衡(wardropの第1原則)

これをこのスライドにおいて，式に直した

利用者均衡条件

$$f_k^{rs} \cdot (c_k^{rs} - c_*^{rs}) = 0$$

$$c_k^{rs} - c_*^{rs} \geq 0$$

c_*^{rs} : ODペア$_{rs}$の最小所要時間

利用される経路

(1)利用されている経路の旅行時間はみな等しい

$$c_k^{rs} = c_*^{rs} \qquad (f_k^{rs} \geq 0)$$

(2)利用されていない経路の旅行時間よりも小さいかせいぜい等しい

$$c_k^{rs} \geq c_*^{rs} \qquad (f_k^{rs} = 0)$$

利用されていない経路

フロー保存則：リンクと経路の関係

$$q_{rs} = \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \qquad x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

リンクパフォーマンス：リンクの所要時間

$$c_k^{rs} = \sum_{a \in A} t_a \, \delta_{a,k}^{rs} \qquad t_a = t_a(x_a)$$

1. 定式化のイメージ

No.4のスライドにあるように需要と供給のイメージ通りに書くと，

需要サイド：道路利用者の経路選択

リンク交通量

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

経路選択交通量

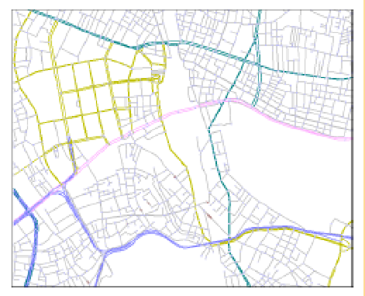
$$f_k^{rs} \geq 0$$

経路選択

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - c_*^{rs}) = 0$$

$$c_k^{rs} - c_*^{rs} \geq 0$$

供給サイド：道路ネットワークの混雑



リンクコスト（混雑）

$$t_a = t_a(x_a)$$

経路コスト

$$c_k^{rs} = \sum_{a \in A} t_a \, \delta_{a,k}^{rs}$$

2. 数理最適化問題への変換(1)

- Beckmannら(1956)は，利用者均衡が以下に示す最適化問題へと変換できることを示し，数学的位置づけを明確化した(数理最適化問題なら数値計算法が確立されていたため，効率よく求解可能になった)．

$$minZ(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

Subject to

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \qquad q_{rs} = \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad x_a \geq 0$$

制約条件

2. 数理最適化問題への変換(2)

数理最適化問題に置き換える理由

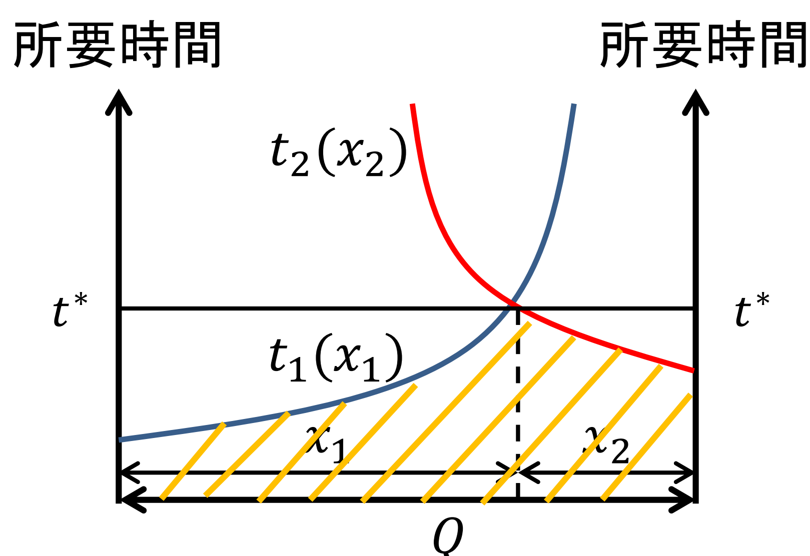
1. 利用者均衡条件は連立方程式(不等式)問題となるが，そのまま解くことは難しい(多変数なので大きなネットワークには無理)

2. 数学的に等価な数理最適化問題に置き換えて，数値計算により解いたほうが効率が良い

$$minZ(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

➢目的関数zを最小化する多次元非線形最適化問題として定式化．なお，目的関数には具体的な交通行動的な意味はない

➢視覚的には，右図の斜線部を最小化する



2. モデルの等価性(1)

等価性の証明

◆数理最適化が正しく非線形連立方程式を表現しているか
◆ラグランジュ未定乗数法を用いて「等価性」を示すことが可能

1)準備

目的関数を経路交通量の関数として書き直す

➢制約条件が経路交通量に関連するので，そのほうが定式化しやすい．

$$minZ(\mathbb{x}) = \sum_{a} \int_{0}^{x_a} t_a(w)dw$$

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \qquad q_{rs} = \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \qquad f_k^{rs} \geq 0 \qquad x_a \geq 0$$

➢ここで，$\mathbb{x} = \mathbb{x}(\mathbb{f})$ とすると，

$$minZ[\mathbb{x}(\mathbb{f})] = \sum_{a} \int_{0}^{x_a} t_a(w)dw$$

2. モデルの等価性(1)

$$\min Z[\mathbb{x}(\mathbb{f})] = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

- リンク交通量の非負制約

$$x_a \geq 0$$

経路交通量の非負制約が満たせば，同時に満たされるため，考えなくてよい

- 目的関数は本質的には変化しないといえる.

2. モデルの等価性(2)

2)ラグランジュ未定乗数法

制約条件の下で最適化を行う解析手法で，制約条件を定数とする新たな関数(ラグランジュ関数)を用いて極値問題を解くことが可能

ラグランジアン

$$\mathcal{L}(\mathbb{f},\lambda) = Z\left[\mathbb{x}(\mathbb{f})\right] + \sum_{rs} \lambda_{rs} \boxed{\left(q_{rs} - \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs}\right)}$$

フロー保存則

Kuhn-Tucker条件

$$f_k^{rs} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbb{f},\boldsymbol{\lambda})}{\partial f_k^{rs}} = 0 \qquad \forall rs, k$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbb{f},\boldsymbol{\lambda})}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \qquad \forall rs, k$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbb{f},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{rs}} = 0 \qquad \forall rs$$

KKTの一階条件

2. モデルの等価性(3)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \mathcal{L}(\mathbb{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \dfrac{\partial}{\partial f_l^{mn}} Z[\mathbb{x}(\mathbb{f})] + \dfrac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} \lambda_{rs} \left(q_{rs} - \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \right) \\
\qquad = c_l^{mn} - \lambda_{rs} \\
\dfrac{\partial}{\partial \lambda_{rs}} \mathcal{L}(\mathbb{f}, \boldsymbol{\lambda}) = q_{rs} - \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs}
\end{cases}
$$

$$f_k^{rs} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbb{f}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial f_k^{rs}} = 0 \qquad \forall rs, k \quad \Rightarrow \quad f_k^{rs}(c_k^{rs} - \lambda_{rs}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbb{f}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \qquad \forall rs, k \quad \Rightarrow \quad c_k^{rs} - \lambda_{rs} \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbb{f}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{rs}} = 0 \qquad \forall rs \quad \Rightarrow \quad q_{rs} = \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs}$$

3. 解の一意性(1)

一意性の証明(リンク交通量)

◆数理最適化問題の解は1つか？(誰が計算しても同じ解が得られる？)
◆2階導関数の条件を用いて「一意性」を示すことが可能

ヘシアン(2導関数行列)

目的関数をリンク交通量で2階偏微分したものを並べた行列

$$Z(\mathbb{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

<u>1階偏導関数</u>

$$\frac{\partial Z(\mathbb{x})}{\partial x_m} = t_m(x_m)$$

<u>2階偏導関数</u>

$$\frac{\partial^2 Z(\mathbb{x})}{\partial x_m x_n} = \begin{cases} \dfrac{dt_n(x_n)}{dx_n} & (m = n) \\ 0 \ (m \neq n) \end{cases}$$

3. 解の一意性(2)

ヘシアン

$$\nabla^2 Z(\mathbb{x}) = \begin{bmatrix} dt_1(x_1)/dx_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & dt_A(x_A)/dx_A \end{bmatrix}$$

- ヘシアンが「正定値」であれば一意. 対角成分が正(最小値となっている)

極値判定の定理

1. 極大または極小→その点で偏導関数の値が全て0
2. その点で偏導関数の値が全て0かつヘッセ行列が正定値→極小
3. その点で偏導関数の値が全て0かつヘッセ行列が負定値→極大

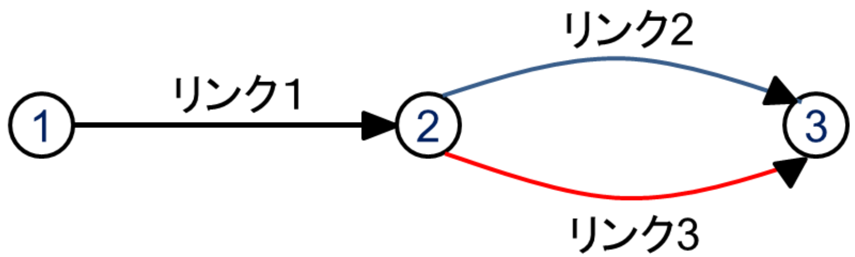
3. 解の一意性(3)

一意性の証明(経路交通量)

◆リンク交通量は一意に求まるが，経路交通量は？

◆ODパターンにより一意に求まらない．．．（複数の組み合わせがある）

下記のネットワークにおいて，利用者均衡配分を行い，それぞれのリンクの交通量を求めると，リンク交通量は一意に決まる．



OD交通量

$Q_{13} = 10$

$Q_{23} = 8$

リンクコスト関数

$t_1 = 2$

$t_2 = 2 + x_2$

$t_3 = 2 + 2x_3$

リンク交通量は，

$x_1 = 18, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = 6$

3. 解の一意性（4）

ここで，　$f_1 = a$　とすると

$f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0$ より　$4 \leq a \leq 10$

までは絞れるが，<u>これを満たす解はいくつも存在する</u>ことがわかる.

（経路交通量は一意に決まるとは限らない）

4. システム最適の定式化

◆Wardropの第2原則（システム最適）System Optimum: UE

道路網における総走行時間が最小となるシステム全体の最適化

➢道路管理者にとって最も理想的なシステムの運用状態

数理最適化問題

$$minZ(\mathbb{x}) = \sum_a x_a t_a(x_a) = \sum_a \int_0^{x_a} \left[t_a(w) + w\frac{t_a(w)}{dw} \right] dw$$

Subject to

$$q_{rs} = \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad x_a \geq 0$$

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

- 目的関数はネットワーク上の総旅行時間の最小となること（SOの定義）
- UEの最適化問題を若干変形させるだけで定式化が可能（制約条件も同じ）
- 等価性および一意性についても同じ性質を有していることが確認できる

4. UEとSOの関係

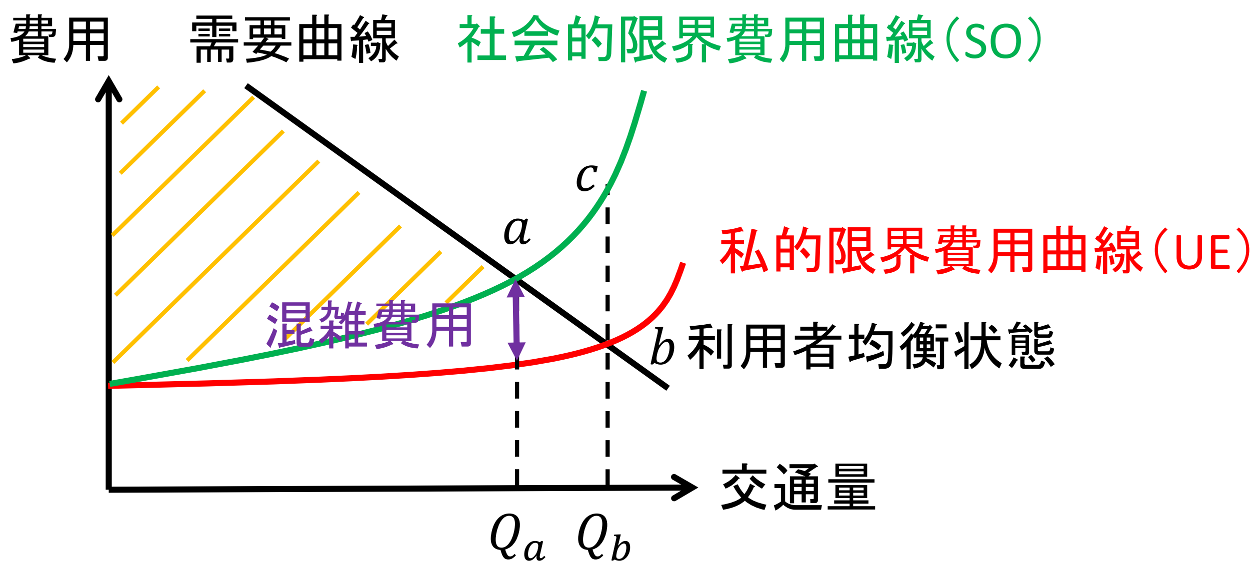
<u>システム最適と混雑費用</u>

◆私的限界費用曲線：一人の利用者が道路に加わるときにその個人が払うコストを表す

➢リンクコスト関数$t_a(w)$に対応する．UEに対応．

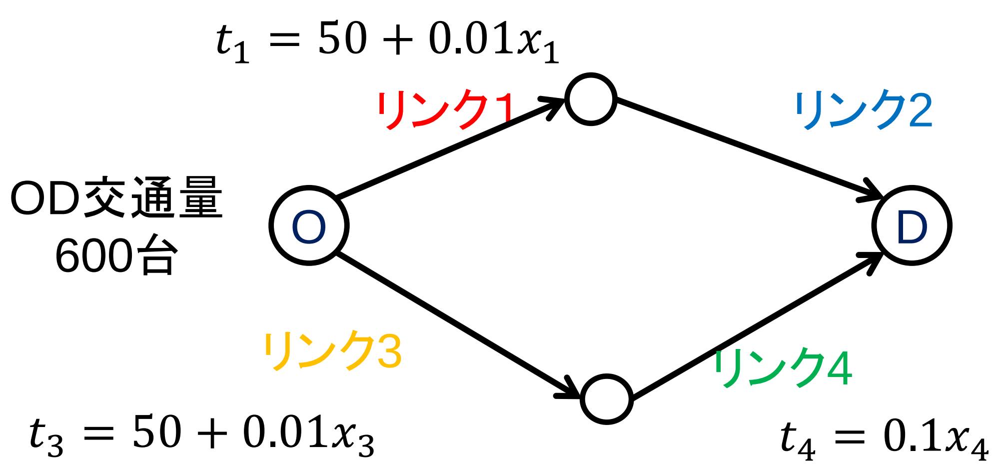
◆社会的限界費用曲線：一人の利用者が加わることによる社会的費用の増加分を表す

➢総所要時間の微分$t_a(w) + w \cdot d\{t_a(w)\}/dw$に対応する．SOに対応．



5. 交通政策におけるパラドックス(1)

Braessのパラドックス



左の状況における利用者均衡における経路交通量と経路旅行時間

経路1: リンク1➡リンク2

$f_1 = 300 \qquad c_1 = 83$

経路2: リンク3 ➡リンク4

$f_2 = 300 \qquad c_2 = 83$

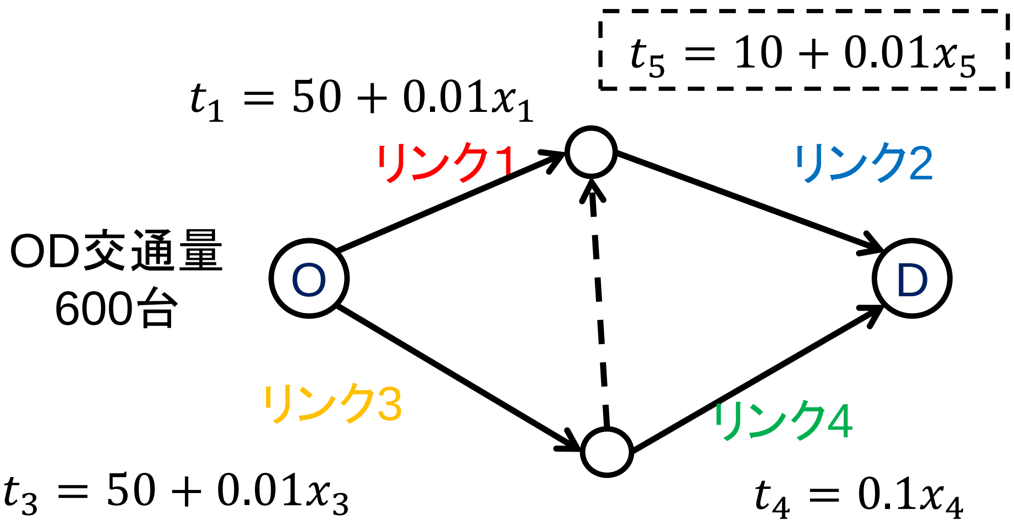
UEとSOの目的関数値(リンク追加前)	
UE: 399	SO: 498

5. 交通政策におけるパラドックス(2)

Braessのパラドックス

◆より高い道路サービスレベル(総所要時間の低減)を目指して以下のようにリンク5の道路を建設したとする

◆新たな経路(リンク3+リンク5+リンク2)を経路3とする



左の状況における利用者均衡における経路交通量と経路旅行時間

経路1: リンク1➡リンク2
$f_1 = 200$ $c_1 = 92$

経路2: リンク3➡リンク4
$f_2 = 200$ $c_2 = 92$

経路3: リンク3➡リンク5➡リンク2
$f_3 = 200$ $c_3 = 92$

UEとSOの目的関数値(リンク追加前)	
UE: 399	SO: 498

UEとSOの目的関数値(リンク追加後)	
UE:386	SO: 552

6. 非線形計画問題の数値的問題

逐次探索法(反復アルゴリズム)

◆有限回の改善を繰り返して徐々に最適解を求める方法

◆逐次的に探索方向(search direction)とステップ幅(step size)を変化させて最適解に収束させる

1. 初期設定:初期値$\mathbb{x}^0$を設定. 繰り返し回数$k \coloneqq 0$
2. 終了判定:$\mathbb{x}^0$が最適解$\mathbb{x}^*$に近ければ終了
3. 更新:$\mathbb{x}^{n+1} = \mathbb{x}^n + \alpha\mathbb{d}$.

目的関数$Z\,[\mathbb{x}^{n+1}]$を最小にする

探索方向(ベクトル)
⇒進む方向

更新後の解 $\mathbb{x}^{n+1} = \mathbb{x}^n + \alpha\mathbb{d}$

$\mathbb{d}^k = y - \mathbb{x}^k$

現時点での解

ステップ幅(スカラー)
⇒進む距離

yは$y - \mathbb{x}^k$方向ベクトルを示す方向ベクトルの任意の点または端点

➢ yは?

◆ 確定的利用者均衡配分では, Frank-Wolfe法を用いる.

目的関数の降下方向の探索

計算された$\mathbb{x}^{(n)}$に対して適切なy(補助ベクトル)を探すために，点$\mathbb{x}^{(n)}$において目的関数$Z(y)$を線形近似する.

$$
\begin{aligned}
Z(y) &= \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)dw \\
&\approx Z\left(\mathbb{x}^{(n)}\right) + \nabla Z_p(\mathbb{x}^{(n)})^T\left(\boldsymbol{y} - \mathbb{x}^{(n)}\right) \\
&= Z\left(\mathbb{x}^{(n)}\right) + \sum_{a\in A}\left(\boldsymbol{y_a} - \mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})}\right)\frac{\partial Z_p\left(\mathbb{x}^{(n)}\right)}{\partial \mathbb{x}_a^{(\boldsymbol{n})}} \\
&= Z\left(\mathbb{x}^{(n)}\right) + \sum_{a\in A}\left(\boldsymbol{y_a} - \mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})}\right)t_a(\mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})}) \\
&= \underbrace{Z\left(\mathbb{x}^{(n)}\right) - \sum_{a\in A}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{t_a}\left(\mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})}\right)}_{\text{定数}} + \sum_{a\in A} y_a t_a(\mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})})
\end{aligned}
$$

6. Frank-Wolfe法

目的関数$Z(y)$を制約条件のもとで最小化

$$min.Z(y) = \sum_{a \in A} \boldsymbol{y_a} t_a(\mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})})$$

$$s.t. \qquad \sum_{k \in K_{rs}} \boldsymbol{f_k^{rs}} - q_{rs} = 0 \qquad \forall rs \in \Omega(\text{OD})$$

$$y_a = \sum_{k \in K_{rs}} \sum_{rs \in \Omega} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \qquad \forall a \in A$$

ここで上式は，$t_a(\mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})})$の下で総走行時間を最小にする$y$を求めることである．$t_a(\mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})})$は定数であるから，$t_a(\mathbb{x}_{\boldsymbol{a}}^{(\boldsymbol{n})})$のリンク所要時間で求められる最短経路にすべてのOD交通量を流すというall-or-nothing配分をすれば、$Z(y)$を最小にするようなyが得られる

6. Frank-Wolfe法

◆ステップ0：初期設定

すべてのリンクの交通量$x_a^0 = 0$としリンク旅行時間t_a^0を計算する．この旅行時間に基づきall-or-nothing 配分によりリンク交通量の初期値x_a^1を設定する．このとき繰り 返し計算の試行回数$n = 0$ とする．

◆ステップ1：リンク旅行時間の更新

リンク交通量x_a^nに対するリンク旅行時間t_a^nを計算する．このとき OD ペアごとの最小旅行時間u_{rs}^nを計算する．

6. Frank-Wolfe法

◆ステップ2:降下方向ベクトルの探索

リンク旅行時間t_a^nの状態で全てのOD交通量を最短経路に配分するこのときの交通量をy_a^n とする. $d_a^n = y_a^n - x_a^n$によって降下方向ベクトルd_a^nを計算する.

◆ステップ3:降下ステップサイズの探索

以下の式を解くことでステップサイズα^nを探索する.

$$\min_{0 \leq \alpha \leq 1} \sum_a \int_0^{x_a^n + \alpha(y_a^n - x_a^n)} t_a(w) dw$$

6. Frank-Wolfe法

◆ステップ4：リンク交通量・リンク旅行時間の更新

$x_a^{n+1} = x_a^n + \alpha(y_a^n - x_a^n)$を計算することにより，リンク交通量を更新する
そのリンク交通量を用いてリンク旅行時間を更新する さらに，収束判定に必要な経路最小旅行時間u_{rs}^nをこの状態で算出する

◆ステップ5：収束判定

収束判定を満たせば終了，そうでなければn=n+1としてSTEP2へ戻り繰り返す

$$\sum_{rs} \frac{|u_{rs}^{n+1} - u_{rs}^n|}{u_{rs}^{n+1}} \leq \epsilon$$

参考文献

土木学会 土木計画学研究委員会(1998):「交通ネットワークの均衡分析ー最新 の理論と解法ー」第5,8章, 土木学会.

東京大学大学院工学系研究科 都市生活学・ネットワーク行動学研究グループhttps://mathtrain.jp/hessian