基礎ゼミ　第6回目
交通行動と分析のモデリング

第3部　モデリング

第7章　離散･連続選択モデルと連立方程式系

2017年5月18日（木）

福田研究室　学部4年

城間　洋也

はじめに

- 連立方程式モデル系の推定における問題点

- 非線形モデル系の推定法

（選択性修正法とその限界など）

Outline

- 7.1 離散選択モデルと線形回帰モデルの結合
  - 7.1.1 内生変数が説明変数となった場合のモデル推定
  - 7.1.2 モデル系のFTML推定
  - 7.1.3 自己選択性バイアス修正項を用いたモデル推定
  - 7.1.4 多項離散選択モデルを含むモデル系への拡張
- 7.2 限定従属変数を含む連立方程式モデル系
  - 7.2.1 二変量二項選択モデル
  - 7.2.2 線形—二項離散選択—線形モデル
  - 7.2.3 自己選択性バイアス修正項適用にあたっての問題点
- まとめ

7.1 離散選択モデルと線形回帰モデルの結合

- 線形回帰モデル（連続選択モデル）

$$y_n = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{x_n} + \varepsilon_n$$

（y_n:個人nの被説明変数　$\boldsymbol{\alpha}$:係数ベクトル　$\boldsymbol{x_n}$:個人nの説明変数ベクトル　ε_n:誤差項）

最小二乗法（OLS）により$\boldsymbol{\alpha}$を推定

- 離散選択モデル

$$U_{i,n} = \boldsymbol{\beta_{i,n}} \boldsymbol{X_n} + \xi_{i,n}$$

（$U_{i,n}$:個人nの選択肢iによる効用　$\boldsymbol{\beta_{i,n}}$:係数ベクトル　$\boldsymbol{X_n}$:個人nの説明変数ベクトル　$\xi_{i,n}$:誤差項）

最尤推定法により$\boldsymbol{\beta_{i,n}}$を推定

→これらの選択行動が相互に密接に関係していることを考慮し、各モデルを組み合わせた統合的なモデル系を推定することでより広範かつ的確な行動分析が可能となることがある

（ex）自動車利用度と車種選択

7.1 離散選択モデルと線形回帰モデルの結合

- 前回までの選択モデルでは…

  説明変数はモデルの外で定まっている(外生変数)

- 連立方程式モデル系では…

  説明変数にモデル系内で定められる確率的な変数が含まれる(内生変数)

$$
\begin{cases}
X = \beta_0 + \beta_Y Y + \beta_Z Z + \varepsilon_X \\
Y = \qquad \beta_X X + \beta_W W + \varepsilon_Y
\end{cases}
$$

→連立方程式モデル系では推定値にバイアスが生じる

7.1.1 内生変数が説明変数となった場合のモデル推定

$$\begin{cases} Y_n = a + bX_n + u_n \\ Z_n = \alpha + \beta Y_n + v_n \end{cases} \quad (u_n, v_n) \sim \mathrm{MVN}(0, \Sigma)$$

上の簡単なモデルの未知係数をOLS推定すると、、

$$\hat{b} = \frac{\Sigma(X_n - \bar{X})(Y_n - \bar{Y})}{\Sigma(X_n - \bar{X})^2} = \frac{\Sigma x_n y_n}{\Sigma x_n^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma(Y_n - \bar{Y})(Z_n - \bar{Z})}{\Sigma(Y_n - \bar{Y})^2} = \frac{\Sigma y_n z_n}{\Sigma y_n^2}$$

7.1.1 内生変数が説明変数となった場合のモデル推定

$y_n = bx_n + u_n$($\bar{u} = 0$を仮定)であることを考えると$\hat{b}$の期待値は

$$E[\hat{b}] = E\left[\frac{\Sigma x_n\ y_n}{\Sigma x_n^2}\right] = E\left[\frac{\Sigma x_n\ (bx_n + u_n)}{\Sigma x_n^2}\right] = b$$

同様にすると$\hat{\beta}$の期待値は

$$E[\hat{\beta}] = E\left[\frac{\Sigma y_n\ z_n}{\Sigma y_n^2}\right] = E\left[\frac{\Sigma y_n\ (\beta y_n\ + v_n)}{\Sigma y_n^2}\right] = \beta + E\left[\frac{\Sigma y_n v_n}{\Sigma y_n^2}\right]$$

$$= \beta + bE\left[\frac{\Sigma x_n v_n}{\Sigma (bx_n + u_n)^2}\right] + E\left[\frac{\Sigma u_n v_n}{\Sigma (bx_n + u_n)^2}\right]$$

$$= \beta + E\left[\frac{\Sigma u_n v_n}{\Sigma (bx_n + u_n)^2}\right] \neq \beta$$

→OLS推定量$\hat{\beta}$はu_n, v_nが独立でない限り不偏推定量とならない

二段階最小自乗推定法、選択性修正法などの手法を用いる

7.1.2 モデル系のFTML推定

FTML推定

→基本的には最尤推定法と同じ

　データに欠損があっても良い

誤差項の確率密度関数（多変量正規分布）

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

（$\boldsymbol{x}$: 確率変数ベクトル　$\boldsymbol{\mu}$:平均値のベクトル　Σ:分散共分散行列）

→データのサイズが異なっていても同じように個人ごとの尤度を求められる

7.1.2 モデル系のFIML推定

(ex)

モデル系1

$$\begin{cases} Y_n = a + \beta D_n + \varepsilon_n \\ Z_n = \boldsymbol{\gamma X_n} + \xi_n \end{cases} \quad D_n = \begin{cases} 1 \ \ if\ Z_n > 0 \\ 0 \ \ otherwise \end{cases}$$

(ε_n,ξ_n)~MVN(0,Σ), Σ=$\begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_{\varepsilon\xi} \\ & 1 \end{pmatrix}$

誤差項の確率密度関数(ρ:ε_nとξ_nの相関係数)

$$f_{\varepsilon\xi}(s,t) = \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{s}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{s}{\sigma_\varepsilon}\right)t + t^2\right\}\right]$$

対数尤度関数

$$\begin{aligned} LL = N ln \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sqrt{1-\rho^2}} &+ \sum_n D_n\, ln \int_{-\boldsymbol{\gamma X_n}}^{\infty} exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{Y_n-(\alpha+\beta D_n)}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{Y_n-(\alpha+\beta D_n)}{\sigma_\varepsilon}\right)t + t^2\right\}\right] dt \\ &+ \sum_i (1-D_n)\, ln \int_{-\infty}^{-\boldsymbol{\gamma X_n}} exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{Y_n-(\alpha+\beta D_n)}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{Y_n-(\alpha+\beta D_n)}{\sigma_\varepsilon}\right)t + t^2\right\}\right] dt \end{aligned}$$

→最適化

7.1.3 自己選択性バイアス修正項を用いたモデル推定

- 選択性修正法

連続選択モデルの方の誤差項を誤差の条件付き期待値とその期待値からの偏差に分けて考える

$$\eta = E[\eta|i] + \nu$$

$E[\eta|i]$は被説明変数に影響を与える観測されない要因と考える

$E[\eta|i]$は選択確率$\mathrm{P}(i)$とそれに影響を与える変数と相関がある

→ 選択性修正項として$E[\eta|i]$を導入することでνが正規分布とみなすことができればOLSで推定可能

7.1.3 自己選択性バイアス修正項を用いたモデル推定

- 自己選択性バイアス修正項の導出

(ex)

モデル系1

$$\begin{cases} Y_n = a + \beta D_n + \varepsilon_n \\ Z_n = \boldsymbol{\gamma X_n} + \xi_n \end{cases} \quad D_n = \begin{cases} 1 \;\; if\; Z_n > 0 \\ 0 \;\; otherwise \end{cases}$$

(ε_n, ξ_n)~MVN(0,Σ), Σ=$\begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_{\varepsilon\xi} \\ & 1 \end{pmatrix}$

p6と同様に$d_n = D_n - \overline{D}$などを定義するとβのOLS推定量とその期待値は

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma y_n \; d_n}{\Sigma d_n^2} = \beta + \frac{\Sigma \varepsilon_n d_n}{\Sigma d_n^2}$$

$$E\left[\hat{\beta}\right] = \beta + E\left[\frac{\Sigma \varepsilon_n d_n}{\Sigma d_n^2}\right]$$

7.1.3 自己選択性バイアス修正項を用いたモデル推定

$$E\left[\varepsilon_n d_n\right] = \Pr[Z_n > 0]\,E[(1-\bar{D})\varepsilon_n \mid Z_n > 0] + \Pr[Z_n \le 0]\,E[(-\bar{D})\varepsilon_n \mid Z_n \le 0]$$

サンプル数N→∞の場合を考える

$\bar{D}$を定数として扱い、標準累積正規分布関数Φを用いると、

$$E\left[\Sigma\varepsilon_n d_n\right] = \Phi(\boldsymbol{\gamma X_n})(1-\bar{D})E[\varepsilon_n|\xi_n > -\boldsymbol{\gamma X_n}] + \Phi(-\boldsymbol{\gamma X_n})(-\bar{D})E[\varepsilon_n|\xi_n \le -\boldsymbol{\gamma X_n}]$$

7.1.3 自己選択性バイアス修正項を用いたモデル推定

（2変量正規分布の特性）

(u_1, u_2)~MVN(0,Σ), Σ=$\begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ & 1 \end{pmatrix}$のとき

$$E[u_1|u_2 > c] = \sigma_{12}E[u_2|u_2 > c] = \sigma_{12}\frac{\phi(c)}{1-\Phi(c)}$$

$$E[u_1|u_2 \le c] = \sigma_{12}E[u_2|u_2 \le c] = -\sigma_{12}\frac{\phi(c)}{\Phi(c)}$$

$$E\left[\varepsilon_n d_n\ \right] =$$

$$\Phi(\boldsymbol{\gamma X_n})(1-\bar{D})\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon\xi}\frac{\phi(-\boldsymbol{\gamma X_n})}{\Phi(\boldsymbol{\gamma X_n})} + \Phi(-\boldsymbol{\gamma X_n})(-\bar{D})\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon\xi}\left(-\frac{\phi(-\boldsymbol{\gamma X_n})}{\Phi(-\boldsymbol{\gamma X_n})}\right)$$

$$= \sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon\xi}\phi(-\boldsymbol{\gamma X_n})$$

P10の式（$E\left[\hat{\beta}\right] = \beta + E\left[\frac{\Sigma\varepsilon_n d_n}{\Sigma d_n^2}\right]$）と比べると、$\sigma_{\varepsilon\xi} \neq 0$のとき（$\varepsilon, \xi$に相関があるとき）OLS推定量$\hat{\beta}$は不偏推定量でないことがわかる

7.1.3 自己選択性バイアス修正項を用いたモデル推定

Heckman(1979)は以下のような修正項を用いた推定法を提案した

$$Z_n = \boldsymbol{\gamma X_n} + \xi_n$$
$$D_n = \begin{cases} 1 & if\ Z_n > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

←Z_nの式が説明変数として内生変数を含まないため通常の最尤推定法により$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$推定可

$$\widehat{\lambda_n} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{X_n},\ \widehat{W}_n = \begin{cases} \dfrac{\phi(-\widehat{\lambda_n})}{\Phi(\widehat{\lambda_n})} & \boldsymbol{if}\ D_n = 1 \\ -\dfrac{\phi(-\widehat{\lambda_n})}{\Phi(-\widehat{\lambda_n})} & \boldsymbol{if}\ D_n = 0 \end{cases}$$ を定義

$Y_n = \alpha + \beta D_n + \theta\ \widehat{W}_n + w_n$にOLSを適用

←Y_nの誤差項をε_n=$\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon\xi}\ \widehat{W}_n + w_n$と表すと$w_n$は漸近的に期待値0の独立な確率変数とみなせる

7.1.4 多項離散選択モデルを含むモデル系への拡張

- 前述と同様にして多項離散選択モデルを含む場合でも選択性修正項を導入できる

$$E[\eta|j] = \left(\frac{\sqrt{6\sigma^2}}{\pi}\right)\left[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \rho_i \frac{P_i}{1-P_i} lnP_i - \rho_j lnP_j\right] \begin{pmatrix} \rho_i: e_i \text{と}\eta\text{の相関係数} \\ \sigma^2: \eta\text{の分散} \end{pmatrix}$$

[Dubin, McFadden(1984)]

$$\rightarrow \quad Y_n = \alpha + \boldsymbol{\beta X_n} + \gamma \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} [\rho_i \frac{\widehat{P_i}}{1-\widehat{P_i}} ln\widehat{P_i} - \rho_j ln\widehat{P_j}] + \nu$$

7.2 限定従属変数を含む連立方程式モデル系

- 限定従属変数

→ある限られた範囲の値しかとらない、あるいは何らかの条件に当てはまったときにはデータが観測できないような変数

(ex) パネル調査による観測データとパネル離脱行動

	パネル調査1		パネル調査2
Aさん	○	→	○
Bさん	○	（離脱）	×

7.2.1 二変量二項選択モデル

モデル系2

$$C_n^* = \theta \boldsymbol{Z}_n + \Psi_n \quad , m_n = \begin{cases} 1 \;\; if \; C_n^* > 0 \\ 0 \;\; otherwise \end{cases}$$

$$A_n^* = \beta \boldsymbol{X}_n + \gamma m_n + \varepsilon_n \quad , w_n = \begin{cases} 1 \;\; if \; A_n^* > 0 \\ 0 \;\; otherwise \end{cases}$$

(
C_n^*: 初回調査での個人nの交通手段選択に対応する潜在意識
m_n: 観測された手段選択の指標（単独で運転1それ以外0）
A_n^*: パネル離脱行動に対応する潜在変数
w_n: パネル離脱行動の指標（参加1, 離脱0）
)

→離散選択の結果を内生変数として含むモデルはOLS推定できない

2変量プロビットモデルを適用

7.2.1 二変量二項選択モデル

対数尤度関数LL =

$$\sum_{\substack{n\\ m_n=1\\ w_n=1}} ln \int_{-\theta \boldsymbol{Z}_n}^{\infty} \int_{-(\beta \boldsymbol{X}_n+\gamma)}^{\infty} f_{\Psi_\varepsilon}(s,t)dtds + \sum_{\substack{n\\ m_n=1\\ w_n=1}} ln \int_{-\theta \boldsymbol{Z}_n}^{\infty} \int_{-\infty}^{-(\beta \boldsymbol{X}_n+\gamma)} f_{\Psi_\varepsilon}(s,t)dtds$$

$$+ \sum_{\substack{n\\ m_n=1\\ w_n=1}} ln \int_{-\infty}^{-\theta \boldsymbol{Z}_n} \int_{-\beta \boldsymbol{X}_n}^{\infty} f_{\Psi_\varepsilon}(s,t)dtds + \sum_{\substack{n\\ m_n=1\\ w_n=1}} ln \int_{-\infty}^{-\theta \boldsymbol{Z}_n} \int_{-\infty}^{-\beta \boldsymbol{X}_n} f_{\Psi_\varepsilon}(s,t)dtds$$

→　最適化

7.2.2 線形一二項離散選択一線形モデル

モデル系3

$$y_{1n} = \alpha_1 \boldsymbol{V}_{1n} + \xi_{1n}$$

$$A_n^* = \beta \boldsymbol{X}_n + \varepsilon_n \quad , a_n = \begin{cases} 1 \ \ if \ A_n^* > 0 \\ 0 \ \ otherwise \end{cases}$$

$$y_{2n} = \alpha_2 \boldsymbol{V}_{2n} + \xi_{2n} \quad iff \ \ a_n = 1$$

y_{1n}: 世帯nの初回調査での1時間当たり総トリップ数
a_n: パネル離脱行動の指標（参加1, 離脱0）
A_n^*: パネル離脱行動に対応する潜在変数
y_{2n}: 世帯nの第2回調査での1時間当たり総トリップ数

7.2.2 線形一二項離散選択ー線形モデル

誤差項間に経時的従属性を仮定

$$E[\varepsilon_n|\xi_{1n}] = \frac{\rho_{1\varepsilon}}{\sigma_1}\xi_{1n}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\rho_{1\varepsilon}}{\sigma_1}\xi_{1n} + u_n \quad ,u_n \sim N(0,1-{\rho_{1\varepsilon}}^2)$$

初回調査の誤差項ξ_{1n}と第二回調査に参加するという条件が与えられたとき、ξ_{2n}の期待値は下のようにあらわせる

$$E[\xi_{2n}|\xi_{1n}, \varepsilon_n > -\beta \boldsymbol{X}_n] = \frac{\rho_{12}\sigma_2}{\sigma_1}\xi_{1n} + \sqrt{1-\rho_{12}^2}\sigma_2\rho_{2\varepsilon|1}\frac{\phi(W_n)}{\Phi(-W_n)}$$

$$\left(W_i = \frac{-\beta \boldsymbol{X}_n - \frac{\rho_{1\varepsilon}}{\sigma_1}\xi_{1n}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \quad ,\rho_{2\varepsilon|1} = \frac{\rho_{2\varepsilon} - \rho_{12}\rho_{1\varepsilon}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}\sqrt{1-\rho_{1\varepsilon}^2}} \quad ,\lambda_n = \frac{\phi(W_n)}{\Phi(-W_n)} \right)$$

$$y_{1n} = \alpha_1 \boldsymbol{V}_{1n} + \xi_{1n} \quad \rightarrow \quad A_n^* = \beta \boldsymbol{X}_n + \gamma_1 \widehat{\xi_{1n}} + u_n \rightarrow \quad y_{2n} = \alpha_2 \boldsymbol{V}_{2n} + \gamma_2 \widehat{\xi_{1n}} + \gamma_3 \lambda_n + u_{2n}$$

$\alpha_1 \rightarrow \beta, \gamma_1 \rightarrow \alpha_2, \gamma_2, \gamma_3$ を順に推定

7.2.3 自己選択性バイアス修正項適用にあたっての問題点

OLS推定では誤差項が独立な正規分布である必要がある

$$Y_n = a + bX_n + u_n \quad u_n \sim N(0,1)$$

(問題点)

・離散選択の結果を説明変数に含むときなど、正規確率変数が打ち切られている場合、それと相関を持つ正規確率変数の条件付き分布は正規分布とはならない

・修正項の導入によって得られる誤差項は異質性をもつ（個人によって誤差項の分散が異なる）

→このような限界を考慮した上で修正項が適用可能な場面を判別する必要がある

まとめ

- 内生変数が説明変数となっている場合、誤差項間の相関を考慮してOLS推定する必要がある
- 上の問題を解決するために誤差の期待値を用いた修正項を導入する方法がある
- 離散選択の結果が説明変数に含まれる場合は誤差項の非正規性・異質性の観点から選択性修正法を適用すべきでない
- 適用できない場合は多変量プロビットモデルを適用